Задача № 7

Определите, при каких значениях параметра *a* уравнение

$$a\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{3y} \qquad (1)$$

имеет единственное решение *(x, y)*

Решение

Заметим, что решение (0, 0) является решением ур-ия (1) при любом значении параметра *a*. Поэтому выясним, при каком значении параметра *a* уравнение (1) имеет единственное решение (0, 0)

1. Пусть $a \le 0 \quad \Rightarrow a=-|a|$:

$$(1) \iff \begin{cases} a\le 0, x\ge 0, y\ge 0 \\ \underbrace{-|a|\sqrt{x+y}}_{\le 0}=\underbrace{\sqrt{x}}_{\ge 0}+\underbrace{\sqrt{3y}}_{\ge 0} \end{cases}$$

- равенство возможно лишь, когда обе части уравнения = 0 => *x = 0, y = 0*

Вывод: при $-\infty < a \le 0$ уравнение (1) имеет единственное решение (0, 0)

2. Пусть $a>0$:

$$(1) \iff \begin{cases} a>0, x\ge 0, y\ge 0 \\ \left(a\cdot\sqrt{x+y}\right)^2=\left(\sqrt{x}+\sqrt{3y}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow a^2\cdot(x+y)=x+2\sqrt{3xy}+3y \Leftrightarrow (a^2-1)x+(a^2-3)y=2\sqrt{3xy} \qquad (2)$$

Рассмотрим (2):

$$\left.\begin{array}{l} (a^2-1)x+(a^2-3)y=2\sqrt{3}\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{y} \\ \text{Обозначим}: \sqrt{x}=u \Rightarrow u\ge 0 \\ \qquad \sqrt{y}=v\Rightarrow v\ge 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} u\ge 0, v\ge 0, a\ge 0 \\ (a^2-1)u^2+(a^2-3)v^2=2\sqrt{3}\cdot u\cdot v - \text{однор.ур-ие } 2\text{-го порядка} \end{cases} \qquad (3)$$

Т.о., необходимо найти, при каких $\boldsymbol{a>0}$ уравнение (3) имеет единственное решение *u = 0, v = 0.*

Будем искать от противного: определим, при каких $\boldsymbol{a>0}$ уравнение (3) может иметь решение отличное от (0, 0).

$$\begin{cases} u\ge 0, v\ge 0, a\ge 0 \\ (a^2-1)u^2+(a^2-3)v^2=2\sqrt{3}\cdot u\cdot v \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} u=0, v\ge 0, a>0 \\ (a^2-3)v^2=0 \end{cases} & (4) \\ \begin{cases} u>0, v\ge 0, a>0 \\ (a^2-1)u^2+(a^2-3)v^2=2\sqrt{3}\cdot u\cdot v \end{cases} & (5) \end{array}\right.$$

<u>(4):</u>

$$\begin{cases} u=0, v\ge 0, a>0 \\ (a^2-3)v^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=0, v\ge 0, a>0 \\ \left[\begin{array}{l} v=0 \\ (a^2-3)=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=0, v=0, a>0 \\ u=0, a=\sqrt{3}, v\ge 0 - \text{любое} \end{array}\right. \Rightarrow \text{мн-во решений при } a=\sqrt{3}$$

<u>(5):</u>

$$\left.\begin{array}{l} \begin{cases} u>0, v\ge 0, a>0 \\ (a^2-1)u^2+(a^2-3)v^2=2\sqrt{3}uv \;\; \Big|:u^2 \Leftrightarrow (a^2-3)\left(\dfrac{v}{u}\right)^2-2\sqrt{3}\dfrac{v}{u}+(a^2-1)=0 \end{cases} \\ \qquad\qquad \text{Обозначим}: \dfrac{v}{u}=t \quad \Rightarrow t\ge 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} t\ge 0, a>0 \\ (a^2-3)t^2-2\sqrt{3}t+(a^2-1)=0 \end{cases}$$

Случай, когда $(a^2-3)=0$, нас не интересует, т.к. ранее уже установили, что при $a=\sqrt{3}$ $\exists$ мн-во решений.

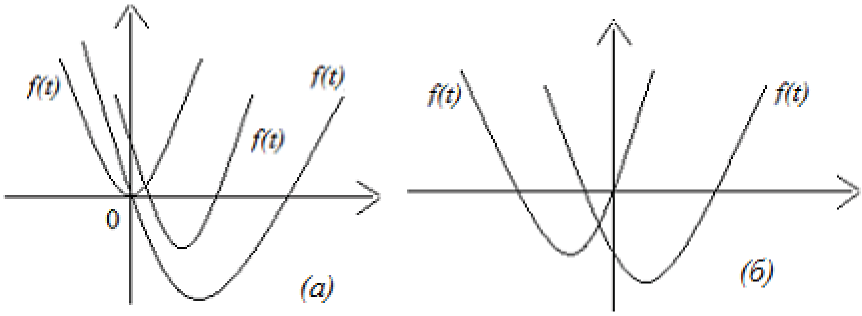
Поэтому при $(a^2-3)\ne 0$ получаем квадратное уравнение относительно t :

$$(a^2-3)t^2-2\sqrt{3}t+(a^2-1)=0 \quad \Leftrightarrow t^2-\frac{2\sqrt{3}}{(a^2-3)}t+\frac{(a^2-1)}{(a^2-3)}=0 \quad \text{при } t\ge 0, a>0 \;\leftrightarrow$$ т.е. требуется найти,

при каких значениях a существуют неотрицательные корни квадратного уравнения.

<=>

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} D \ge 0 \\ t_{верш} \ge 0 \\ f(0) \ge 0 \end{cases} \qquad (a) \\ \\ \begin{cases} D > 0 \\ f(0) \le 0 \end{cases} \qquad (б) \end{array}\right.$$

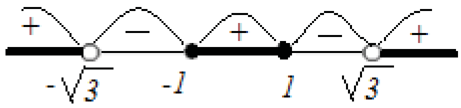


$$D = \left(-\frac{2\sqrt{3}}{(a^2-3)}\right)^2 - 4\cdot\frac{(a^2-1)}{(a^2-3)} = \frac{12-4(a^2-1)(a^2-3)}{(a^2-3)^2} = \frac{12-4(a^4-4a^2+3)}{(a^2-3)^2} = \frac{-4a^2(a^2-4)}{(a^2-3)^2}$$

$$t_{верш} = \left("-\frac{в}{2a}"\right) = \frac{2\sqrt{3}}{2(a^2-3)} = \frac{\sqrt{3}}{(a^2-3)}, \qquad f(0) = \frac{(a^2-1)}{(a^2-3)}$$

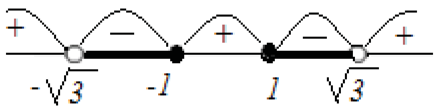
<u>(a)</u>:

$$\left.\begin{cases} \dfrac{-4a^2(a^2-4)}{(a^2-3)^2} \ge 0 \Leftrightarrow (a^2-4) \le 0, a \ne \sqrt{3} \Leftrightarrow |a| \le 2, a \ne \sqrt{3} \Leftrightarrow 0 < a \le 2, a \ne \sqrt{3} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{(a^2-3)} \ge 0 \Leftrightarrow (a^2-3) > 0 \Leftrightarrow |a| > \sqrt{3} \Rightarrow a > \sqrt{3} \\ \dfrac{(a^2-1)}{(a^2-3)} \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{(a-1)(a+1)}{(a-3)(a+3)} \ge 0 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \sqrt{3} < a \le 2$$



<u>$(б)$</u>:

$$\left.\begin{cases} \dfrac{-4a^2(a^2-4)}{(a^2-3)^2} > 0 \Leftrightarrow 0 < a < 2, a \ne \sqrt{3} \\ \dfrac{(a^2-1)}{(a^2-3)} \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{(a-1)(a+1)}{(a-3)(a+3)} \le 0 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow 1 \le a < \sqrt{3}$$



Т.о. решением (5) является:

$$\left[\begin{array}{l} (a) \\ (б) \end{array}\right. \Leftrightarrow 1 \le a < \sqrt{3} \cup \sqrt{3} < a \le 2$$

Решением (3) является:

$$\left[\begin{array}{l} (4) \\ (5) \end{array}\right. \Leftrightarrow 1 \le a \le 2$$

Т.о. при $1 \le a \le 2$ существуют решения $t \ge 0$. А т.к. $t = \dfrac{v}{u}$, где $u \ne 0$ (т.е. $x \ne 0$), то эти решения исходного уравнения отличны от (0, 0).

Из п.1 и п. 2 получаем те значения параметра, при которых ∃ единственное решение (0, 0):

$a \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$

Ответ: $a \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$