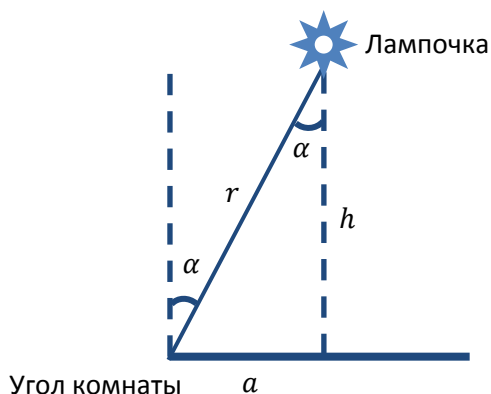


Задача. В центре квадратной комнаты площадью $S = 25 \text{ м}^2$ висит лампа. На какой высоте h от пола должна находиться лампа, чтобы освещенность в углах комнаты была наибольшей? Освещенность E от точечного источника света вычисляется по формуле:

$$E = \frac{I}{r^2} \cos \alpha,$$

где I - сила света (постоянная в данной задаче величина), r - расстояние от источника, α - угол падения лучей света относительно нормали к поверхности.



Решение. Ситуация изображена на рисунке. Площадь данной квадратной комнаты 25 м^2 (квадрат со стороной 5 м). Следовательно, расстояние от центра комнаты до всех углов равно $a = \frac{5}{\sqrt{2}} \text{ м}$ (половина диагонали этого квадрата). Тогда расстояние $r = \sqrt{h^2 + a^2} = \sqrt{h^2 + 12,5}$. Кроме этого из геометрии рисунка находим также $\cos \alpha = \frac{h}{r}$. Подставляя все в формулу для освещенности, получаем:

$$E(h) = \frac{Ih}{(h^2 + 12,5)^{\frac{3}{2}}}$$

Исследуем эту функцию на максимальное значение на промежутке $h \in (0; +\infty)$. Для этого ищем производную и приравниваем ее к нулю:

$$\frac{dE}{dh} = \frac{I(h^2 + 12,5)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}Ih(h^2 + 12,5)^{\frac{1}{2}} \cdot 2h}{(h^2 + 12,5)^3} = 0 \Rightarrow$$

$$h^2 + 12,5 - 3h^2 = 0 \Leftrightarrow h = 2,5 \text{ м.}$$

На исследуемом промежутке это единственная точка максимума, следовательно, именно в ней функция достигает своего наибольшего значения.

Ответ: 2,5 м.